

[1] 次の各問に答えよ。

- (1) 関数 $\frac{1}{\sqrt{A^2 - x^2}}$ の不定積分を求めよ。ただし A は正の定数で、 $-A < x < A$ とする。
- (2) 以下の万有引力のポテンシャルエネルギー $V(x, y, z)$ から重力 $\mathbf{F}$ を計算せよ。

$$V(x, y, z) = -G \frac{mM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -G \frac{mM}{r}, \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

[2] 長さ ℓ の糸と質量 m の質点からなる振り子が、天井からつり下げられ静止している。今、瞬間的に、質点をハンマーで水平方向に叩いたところ、振り子は運動を始めた。ハンマーで叩いた時刻を $t = 0$ として、以下の問に答えよ。重力加速度を g とし、空気抵抗は無視する。また、糸が鉛直方向となす角度を θ として、 $|\theta|$ が 1 より十分小さい値に留まるとする。

- (1) θ に対する運動方程式を書け。ただし、ハンマーによる撃力は含めなくてよい。
- (2) (1) の方程式の一般解（未定の定数を 2 つ含む解）を求めよ。
- (3) ハンマーが質点に与えた力積を I とする。叩いた直後の質点の速度を求めよ。
- (4) (3) の結果を初期条件（のひとつ）として用いて、 $t > 0$ における振り子の運動を決定せよ。

[3] ばね定数 k のばねにつながれて、速度 v に比例する空気抵抗 $-m\gamma v$ を受けながら運動する質量 m の質点を考える。ここで、 γ は空気抵抗の強さを表す比例係数である。ばねの自然長からの伸びを x として、以下の問に答えよ。

- (1) 運動方程式を書け。（速度は v の $\dot{x}$ のどちらで表してもよい。）
- (2) 空気抵抗が無い時、 $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ は保存される（時間に依存しない）ことを示せ。
- (3) 空気抵抗がある時、(2) の結果はどのように変更されるか、 $\frac{dE}{dt}$ を計算して説明せよ。

[4] 力 $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ を受けている質点を考える。ここで、 $\mathbf{r} = (x, y)$ は質点の位置ベクトル、 k は定数である。この力に抗して、質点を以下の径路に沿って移動させるときの仕事を計算せよ。

- (1) 原点から点 A: $(R, 0)$ まで x 軸に沿って。
- (2) 点 A: $(R, 0)$ から点 B: $(0, R)$ まで原点を中心とする半径 R の円周に沿って。
- (3) 点 A: $(R, 0)$ から点 B: $(0, R)$ まで線分 AB に沿って。