物理学基礎 I （河野） 期末試験　　2016 年 7 月 29 日

[1] 次の各問に答えよ。

(1) 運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = -k\boldsymbol{r} - \eta\dot{\boldsymbol{r}}$ に従う質点の力学的エネルギーの（時間に対する）変化率を表す式を導け。（m は質量、$V(\boldsymbol{r})$ はポテンシャルエネルギー、η は摩擦係数。）

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ に対する微分方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}$ を、初期条件 $\boldsymbol{a}(t=0) = (b, 0, c)$ のもとで解け。ただし $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ は定ベクトル（ω は定数）、b, c は定数である。（ヒント：方程式を成分で書き下してみよ。）

(3) 2次元平面上を運動する粒子（質量 m）の位置を極座標 (r, θ) で表すとき、角運動量の z 成分の表式を求めよ。

[2] 空間の点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ におけるポテンシャル・エネルギーが

$$V(\boldsymbol{r}) = -A\,r\,e^{-kr}$$

である質量 m の質点の運動を考える。ただし $r = |\boldsymbol{r}|$ で A, k は正の定数である。質点は時刻 $t = 0$ で位置 $\boldsymbol{r}_0 = (R, 0, 0)$ にあり速度 $\boldsymbol{v}_0 = (0, 0, v)$ を持っていたとして、以下の問に答えよ。

(1) 点 $\boldsymbol{r}$ において質点に作用する力 $\boldsymbol{F}$ を求めよ。

(2) $t = 0$ での原点のまわりの角運動量ベクトルを成分表示で求めよ。

(3) その後の運動はある平面内で起こる。その理由を説明せよ。また、その平面を答えよ。

[3] 自転する地球に固定された座標系では、質量 m の質点の運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

で与えられる。ここで $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ は質点の位置ベクトル、$\boldsymbol{\omega}$ は地球自転の角速度ベクトル、$\boldsymbol{F}$ は質点に働く（真の）力である。北緯 λ の地点での放物体の運動を考えるために、地表に基準点を適当に決めて、そこから南方向に x 軸、東方向に y 軸、鉛直上向きに z 軸をとる。地表における重力加速度の値を g とする。

(1) 地球の角速度の大きさを ω として、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を成分で表せ。

(2) 右辺第２項と第３項はどのような効果を生むか、それぞれ説明せよ。

(3) 運動方程式を成分ごとに書き下せ。ただし、重要でないと思う項は、理由を書いて落としてもよい。

(4) 高さ $z = h$ の点から質点をそっと放した後に質点がたどる軌跡を求めよ。（地球の自転の効果の本質を捉えていれば、厳密に解かなくてもよい。）