物理学基礎 I （河野） 期末試験

2022 年 7 月 27 日

以下の [1] に解答せよ（必答）。さらに [2], [3] のどちらかに解答せよ（選択）。（すなわち、全3問のうち、2問に解答することになります。）

[1] 次の各問に答えよ。

(1) 3次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ について、等式 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$ を証明せよ。（成分で示す場合は、たとえば x 成分のみ示せばよい。）

(2) 2次元平面上を運動する質点の位置を極座標 (r, θ) で表すとき、加速度の r-成分 a_r および θ-成分 a_θ がそれぞれ $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ で与えられることを示せ。

[2] 質量 m の質点が糸に結ばれ、水平でなめらかな板の上を回転している（図参照）。糸は板に開けられた小さな穴を通して下に引っ張られている。質点の回転半径（穴から質点までの糸の長さ）を r、回転角を θ とする。

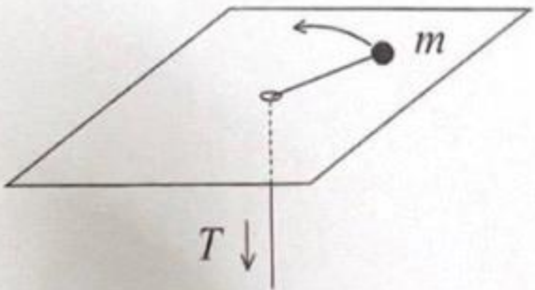
(1) 糸の張力を T として、質点の運動方程式を極座標 (r, θ) で表せ。上問 [1](2) の結果を使ってよい。

(2) (1) で得られた運動方程式から角運動量保存則を導け。

(3) $r = r_0$ のとき質点は一定の速度 v_0 で回転しているとして、これを維持するのに必要な張力 T を求めよ。

(4) 次に、糸をゆっくり下に引いて r を r_0 から r_1 に縮めた。これに要した仕事を求めよ。（ヒント：$\ddot{r}$ は小さいとして無視せよ。）

(5) $r = r_1$ になったときの質点の速度および角運動量を求めよ。



[3] 自転する地球に固定された座標系では、質量 m の質点の運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} - 2m\,\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} - m\,\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{R}_O + \boldsymbol{r}))$$

で与えられる。ここで、$\boldsymbol{R}_O$ は地球の中心から測った地表の基準点 O の位置ベクトル、$\boldsymbol{r}$ は O から測った質点の位置ベクトル、$\boldsymbol{\omega}$ は地球自転の角速度ベクトル、$\boldsymbol{F}$ は質点に働く（真の）力である。地表の基準点 O は北緯 λ にあるとして、そこから南方向に x 軸、東方向に y 軸、鉛直上向きに z 軸をとり、質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と表す。地表における重力加速度の値を g とする。

(1) 地球の角速度の大きさ ω の値を概算せよ。

(2) ω を用いて、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を成分で表せ。

(3) 右辺第２項と第３項はどのような効果を生むか、それぞれ説明せよ。

(4) 運動方程式を成分ごとに書き下せ。ただし、重要でないと思う項は、理由を書いて落としてもよい。

(5) 高さ $z = h$ の点から質点を初速度ゼロで放した後に質点がたどる軌跡を求めよ。（地球の自転の効果の本質を捉えていれば、厳密に解かなくてもよい。）

****

（公式）

- ベクトルの外積：$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対して、

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

- ２次元極座標：$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$,

$$\boldsymbol{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta), \quad \boldsymbol{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

****